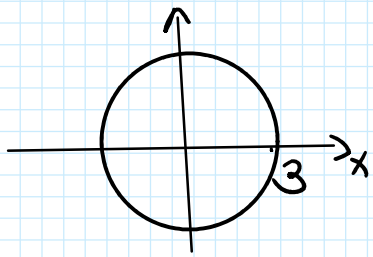
תרגול 1

Wednesday, April 15, 2026 10:26 AM

קונים רבעיים

בוחנאים

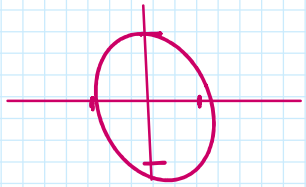


$9 = y^2 + 9x^2$

$9 - y^2 = 9x^2$

$x=0 \Rightarrow y=\pm 3$

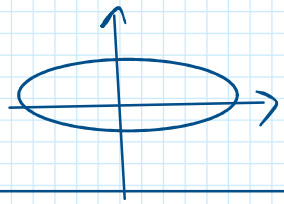
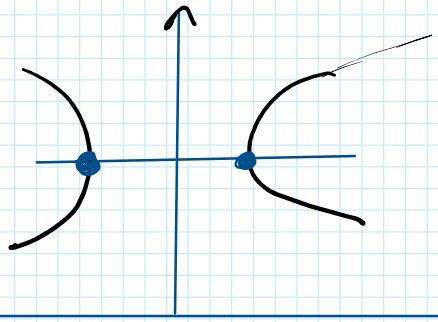
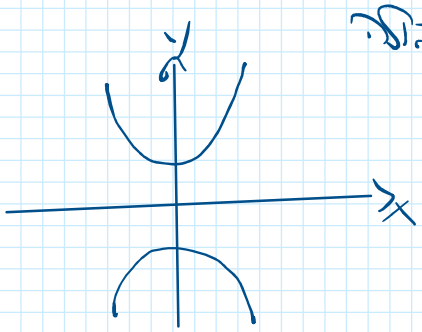
$y=0 \quad x=\pm\sqrt{\frac{9}{9}}$

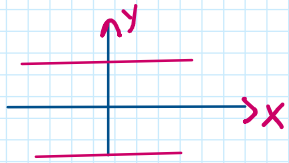
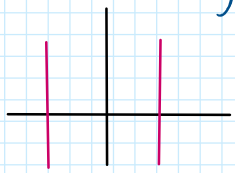
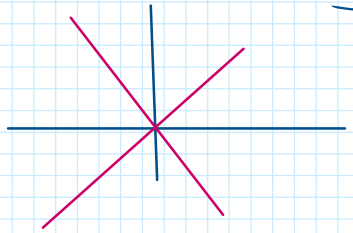


נחקור את צורת הקונים:

$$\boxed{ax^2+by^2=c}$$

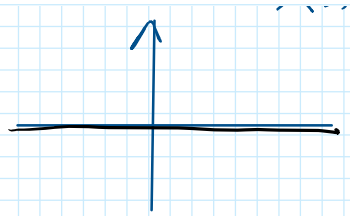
סביב כל המונחים הרלוונטיים של a,b,c.

	הסברים	קונים	a	b	c
$9=y^2+3x^2$	אם $b=a$ מרוכז למקסם	אליפסה. 	+ (−)	+ −	+ (−)
$9x^2-3y^2=5$ $x=0:\ -3y^2=5$ אין חיתוך עם ציר ה-y		היפרבולה 	+ (−)	− +	+ (−)
$-5=y^2+9x^2$ $y=0:\ -x^2=5$ אין חיתוך עם ציר ה-x.		היפרבולה 	− (+)	+ −	+ (−)
			+	+	− (+)

$2x^2+3y^2=-5$	$\emptyset$	+ (−)	+ −	− +
$2x^2-3y^2=0$	נקודת מוצא (0,0)	+ (−)	+ −	0 (0)
$0x^2+3y^2=5$ $y=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ $y=\pm\sqrt{\frac{c}{b}}$	שני ישרים מקבילים לציר ה-x 	0 (0)	+ −	+ −
$2x^2+0y^2=5$ $x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ $x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$	שני ישרים מקבילים לציר y 	+ (−)	0 0	+ −
$2y^2=-5$	$\emptyset$	0 0	+ −	− +
$2x^2=-5$	$\emptyset$	+ (−)	0 0	− +
$2x^2-3y^2=0$ $3y^2=2x^2$ $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$ $y=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$	שני ישרים נחתכים בנקודת 	+ (−)	− +	0 (0)
$0x^2+0y^2=5$	$\emptyset$	0 (0)	0 0	+ −
$2y^2=0$	ציר ה-x	0 (0)	+ −	0 (0)

$2y^2=0$

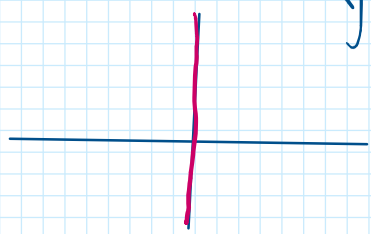
$y=0$



0	−	0

$0=2x^2+0y^2$

$x=0$



+ −	0	0

אין גבול

חיבלים

קבעו עבור איזה ערכי α את סוגי הקונים.

$$1=2y^2+(1+2x^2)\alpha$$

פתרון

נסדר

$$1=2y^2+\alpha+2x^2\alpha$$

$$\alpha-1=2y^2+2x^2\alpha$$

a	b	c
α	1	$1-\alpha$
	+	

$\alpha<0$ $\quad 0<\alpha<1 \quad$ $\alpha>1$

0 1

$\alpha<0$: $-\,|\,+\,|\,+$ — היפרבולה

$\alpha=0$: $0\,|\,+\,|\,+$ — שני ישרים אחד בלתי לפנים הא

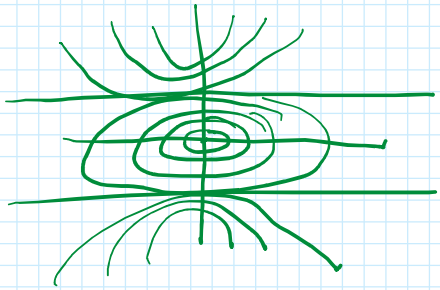
$0<\alpha<1$: $+\,|\,+\,|\,+$ — אי־ריק

$\alpha=1$: $0\,|\,+\,|\,+$ — נקודה בודדת (0,0)

$\alpha>1$: $-\,|\,+\,|\,+$ — $\emptyset$

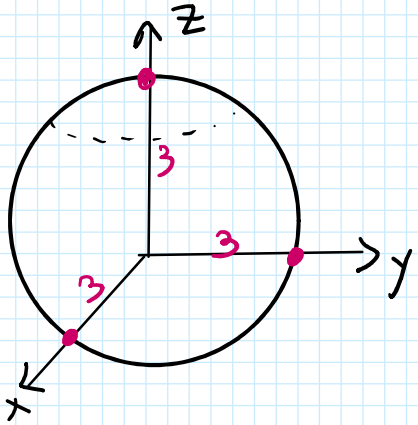
//

אבל מה פה?



משטחים ריבועיים:

ג'יל:



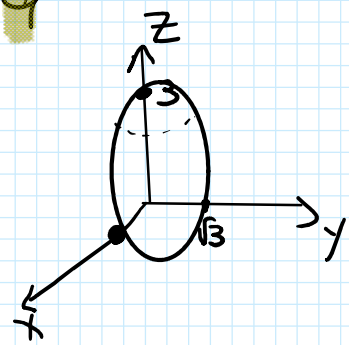
$$x^2+y^2+z^2=9$$

$$2x^2+3y^2+z^2=9$$

$x=0, y=0, \ z=\pm 3$

$x=0, z=0 \ \ y=\pm\sqrt{3}$

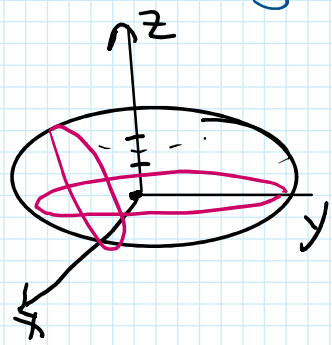
$y=0, z=0, \ x=\pm\sqrt{\frac{9}{2}}$



נרדה לצורה כללית

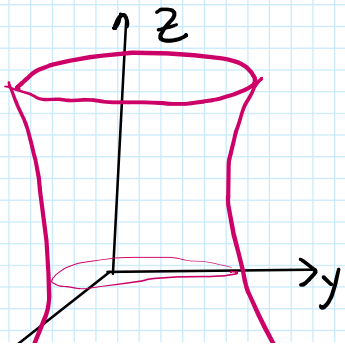
$$\boxed{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=\delta}$$

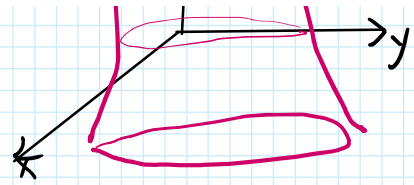
α	β	γ	δ	המשטח	הסברים
+	+	+	+	אליפסואיד	אם $\alpha=\beta=\gamma$ מדובר בספרה (מעבר לרדיוס)
+	−	−	−		



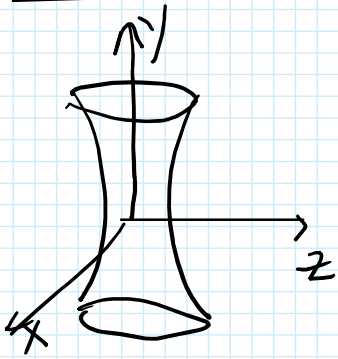
$$40=2x^2+y^2+5z^2$$

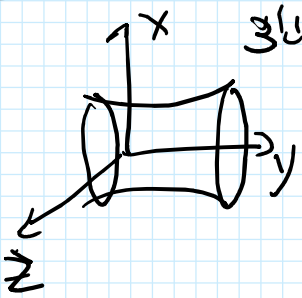
+	+	−	+	היפרבולואיד חד יריעתי	$4=x^2+y^2-z^2$
+	−	+	−		





+	−	+	+	
(−	+	−	−)	
−	+	+	+	
(+	−	−	−)	





היפרבולואיד

(מכוון ע"י y)

(מכוון ע"י x)

$9x^2+3y^2-z^2=-5$

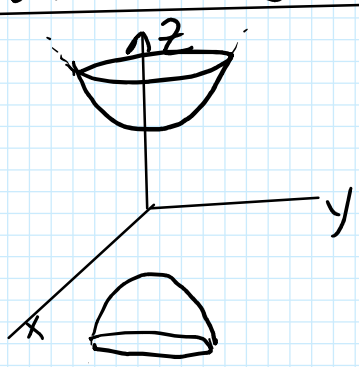
$z=0$ $\emptyset$

$z=\pm 1$ $\emptyset$

$z=\pm 3$ אליפסה

+	+	−	−
(−	−	+	+)

היפרבולואיד דו יריעתי



$9x^2+3y^2+5z^2=0$

+	+	+	0
(−	−	−	0)

נקודה בודדת

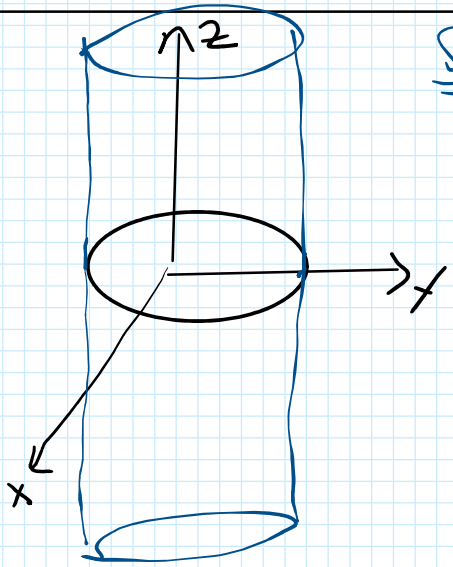
$(0,0,0)$

$9x^2+3y^2+0z^2=5$

אם $\alpha=\beta$ מתקבל שני המשלים.

+	+	0	+
(−	−	0	−)

גליל



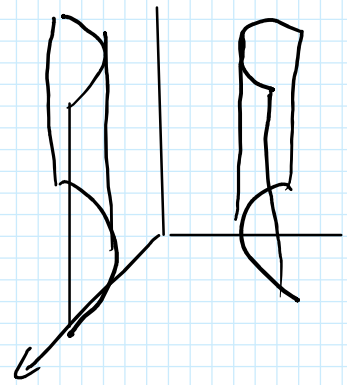
+	−	0	+

אלא שם

$9x^2-3y^2+0z^2=5$

אלא שם

+	−	0	+
(−	+	0	+)

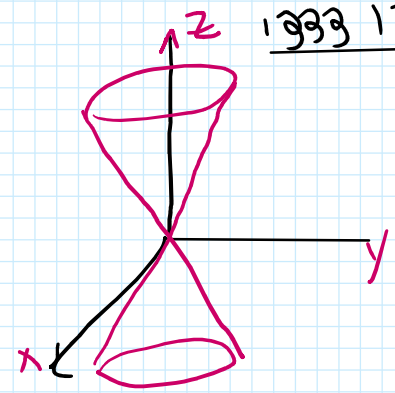


$9x^2+3y^2-z^2=0$

$9x^2+3y^2=z^2$

$\pm\sqrt{9x^2+3y^2}=z$

תרוס 13 בעמ'



+	+	−	0
(−	−	+	0)

נפין כמשוואה:

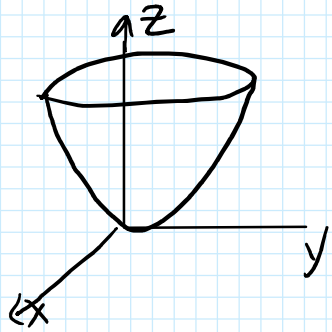
$$\boxed{ax^2+by^2=cz}$$

משטח	a	b	c
	+	+	+
	(−	−	−)

הסבר:

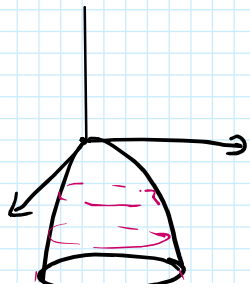
פרבולואיד אליפטי!

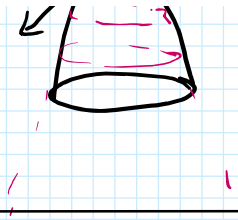
$9x^2+3y^2=z$



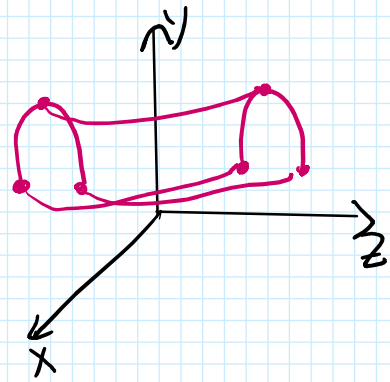
$9x^2+3y^2=-z$

+	+	−
−	−	+





$z=y^2-2x^2$	הפרבולואיד	+	−	+
		−	+	−

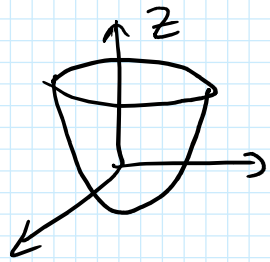


בטכניקה לאה בן ד"ל

$$z=y^2-2x^2$$

$$z+1=y^2-2x^2$$

$$z=1-(y^2-2x^2)$$



כל היצירות שיש בהן x^2 כדי, הן "חלקיות" לסיבוב (רחוקות) והן שם צורות לא חלקות.

דוגמאות

תרגיל צורת המשטח

$$2x^2-2x+2y^2+4y=1$$

$$2(x^2-\tfrac{3}{2}x)+2(y^2+2y)=1$$

$$2\left((x-\tfrac{3}{4})^2-\tfrac{9}{16}\right)+2\left((y+1)^2-1\right)=1$$

$$2(x-\tfrac{3}{4})^2+2(y+1)^2=1+\tfrac{18}{16}+2$$

$$1=y^2+2x^2$$

משטח אליפסה

$$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+2(y+1)^2=1+\frac{9}{16}+2$$

$$2x^2-3x+2y^2+4y=-5+\alpha$$

$$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+2(y+1)^2=\underbrace{-5+\frac{9}{16}+2}+\alpha$$

דוגמא נוספת

סבבים

$$2x^2-3x+4y^2-4y+5z^2-2z=-8+\alpha$$

תרגיל

לכל ערך של c, הקבע את סוגי המשטח.

$$\frac{x^2+y^2-4}{z^2+1}=c$$

פתרון

נסדר:

$$x^2+y^2-4=cz^2+c$$

$$x^2+y^2-cz^2=4+c$$

α	β	γ	δ
+	+	$-c$	$4+c$

$c>0$

היפרבולואיד חד יריעתי

$-4<c<0$

אליפסואיד

$c<-4$

$\emptyset$

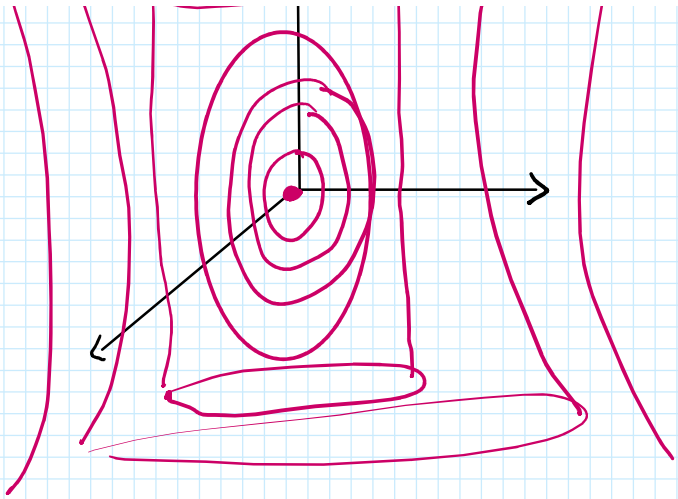
$c=0$

שני

$c=-4$

נקודה בודדת

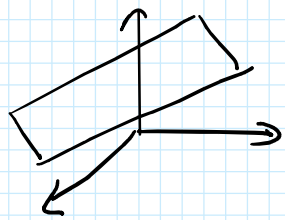
המרה



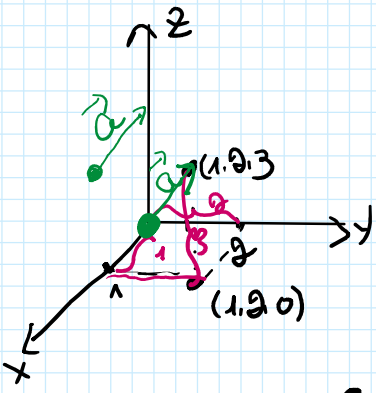
משטח:

מישור

$ax+by+cz=d \Rightarrow$ משוואת מישור.



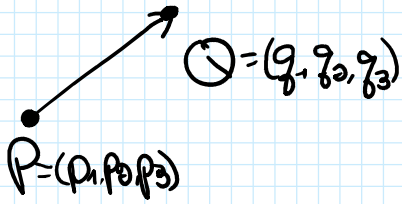
וקטורים במרחב:



נקודת $A=(1,2,3)$

וקטור $\vec{a}=(1,2,3)$

$\overrightarrow{PQ}=(q_1-p_1,\ q_2-p_2,\ q_3-p_3)$



אורך של וקטור:

$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}$

כפל של וקטור בסקלר:

$\vec{b}=|(1,2,3)|=(2,4,6)$

כפל של וקטור בסקלר:

$\alpha\vec{a} = \alpha(1,2,3) = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$

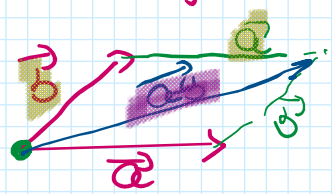
חיבור של שני וקטורים:

דרך 1:

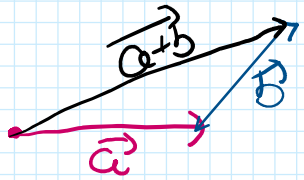
$\vec{a}=(1,2,3)$

$\vec{b}=(1,1,1)$

$\vec{a}+\vec{b}=(2,3,4)$

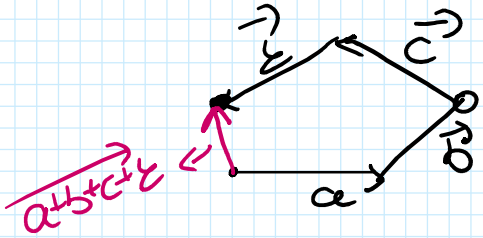


דרך 2:



דרך נוספת לחבר כמה וקטורים תמיד של וקטור משני וקטורים:

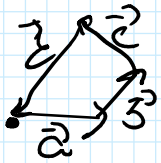
לדוגמא: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$

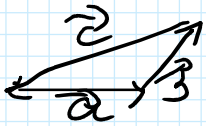


תרגיל:

$\overrightarrow{a+b+c+d}=0$? מה פה אומר

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

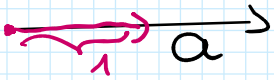




וקטור יחידה:

$\hat{a}$ וקטור בכיוון $\vec{a}$ באורך 1.

$\vec{a}=(1,2,3)$



$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{a}$

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

$$\hat{a} = \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) //$$